Démonstrations

La fonction exponentielle de base e

- **Continuité** : La fonction exponentielle est dérivable par définition, donc continue.
- **Stricte monotonie** : Signe de la dérivée
- **Limites** :
    - En $+\infty$: Résoudre $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x$.
    - En $-\infty$: Poser $X = -x$.
- **Bijection** : Stricte croissance et théorème de bijection

La fonction logarithme népérien

- **Symétrie** : Soit $M(x;y)$ un point de la courbe de ln. On a donc $y = \ln x$. Par ailleurs $x = e^y$. Donc le point $M'(y;x)$ est sur la courbe de l'exponentielle. Or le point *M'* est le symétrique de *M* par rapport à la droite d'équation $y = x$ donc les courbes de ln et de l'exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- **Opérations :**
    - Produit : $e^{\ln A + \ln B} = e^{\ln A} e^{\ln B} = AB$
      $D'où$ $\ln A + \ln B = \ln(AB)$
    - Inverse : $\ln\frac{1}{B} + \ln B = \ln 1 = 0 \Rightarrow \ln\frac{1}{B} = -\ln B$
    - Quotient : $\ln\frac{A}{B} + \ln B = \ln A \Rightarrow \ln\frac{A}{B} = \ln A - \ln B$
    - Puissance : Par récurrence, on démontre que si $p \geq 0,\ \ln\left(A^p\right)$. De plus, si $p \leq 0$,
      $\ln\left(A^p\right) = \ln\frac{1}{A^{-p}} = -\ln\left(A^{-p}\right)$. Or $-p \geq 0$, donc $\ln\left(A^p\right) = p\ln A$.
    - Racine : $\ln A = \ln\left(\sqrt{A}\sqrt{A}\right) = \ln\sqrt{A} + \ln\sqrt{A} = 2\ln\sqrt{A} \Rightarrow \ln\sqrt{A} = \frac{1}{2}\ln A$.